

高三数学参考答案

1. A 【解析】本题考查复数的模、共轭复数与虚部,考查运算求解能力.

因为 $\frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{1+3i}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10}i$, 所以其虚部为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

2. B 【解析】本题考查集合的交集与一元二次不等式的解法,考查运算求解能力.

因为 $A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $B = (-3, 2)$, 所以 $A \cap B = (-3, 0) \cup (1, 2)$.

3. C 【解析】本题考查统计知识,考查数据处理能力.

因为 1 厘米 = 10 毫米, 所以标准差变为 $6.1 \times 10 = 61$ 毫米.

4. A 【解析】本题考查充分、必要条件的判定,考查推理论证能力.

因为 $0 < b < 1$, 所以 $b > b^3$, 故“ $a > b^3$ ”是“ $a > b$ ”的必要不充分条件.

5. D 【解析】本题考查函数图象的识别,考查逻辑推理的核心素养与数形结合的数学思想.

因为 $f(-x) = -x^2 \sin x + x \cos x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 故排除 A 与 C. 因为

$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{12}(\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}) < 0$, 所以排除 B, 故选 D.

6. A 【解析】本题考查计数原理的应用,考查数据处理能力.

甲、乙两位同学在 A 组或 B 组的情况有 $C_6^3 C_3^3 \times 2 = 120$ 种, 甲、乙两位同学在 C 组的情况有 $C_6^3 C_3^3 = 20$ 种, 共计 140 种.

7. B 【解析】本题考查三角函数模型的应用,考查数学运算与数学建模的核心素养.

下午两点整即 $t = 14$, 当 $t = 14$ 时, $f(t) = 7$. $\because A \sin \frac{17\pi}{6} + 5 = 7$, $\therefore A = 4$, $\therefore$ 当 $9 \leq t \leq 16$ 时, $\frac{\pi}{3}t - \frac{11\pi}{6} \in [\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}]$, $\therefore$ 当 $\frac{\pi}{3}t - \frac{11\pi}{6} = \frac{5\pi}{2}$ 时, $f(t)$ 取得最大值, 且最大值为 $4 + 5 = 9$.

8. D 【解析】本题考查对数运算的应用(估算数量级),考查化归与转化的数学思想与数据处理能力.

因为 $\frac{m}{M} = 3 \times 10^{-6}$, 所以 $\lg \frac{m}{M} = \lg 3 + \lg 10^{-6} \approx 0.4771 - 6 = -5.5229 \approx -5.523$, 故 $\frac{m}{M} \approx 10^{-5.523}$.

9. AC 【解析】本题考查双曲线的性质,考查运算求解能力与数形结合的数学思想.

因为 $a^2 = 1$, $b^2 = 6$, 所以 $c^2 = 1 + 6 = 7$, 则 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{7}$, $\frac{2b}{2a} = \sqrt{6}$, 所以 A 正确, B 错误.

双曲线 $\frac{y^2}{6} - x^2 = 1$ 与 C 的渐近线均为 $y = \pm\sqrt{6}x$, 所以 C 正确. 因为 C 的渐近线的斜率小于 3, 所以直线 $y = 3x$ 与 C 相离, 所以 D 错误.

10. BD 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

设 $\tan x = t$, 因为 $\tan 2x - \tan(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{2t}{1-t^2} - \frac{t+1}{1-t} = \frac{2t-(t+1)^2}{1-t^2} = \frac{t^2+1}{t^2-1} = 5$,

所以 $t^2 = \frac{3}{2}$, 故 $\tan x = t = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

11. BCD 【解析】本题考查空间中点、线、面的位置关系,考查化归与转化的数学思想及直观想象、数学运算、逻辑推理的核心素养.

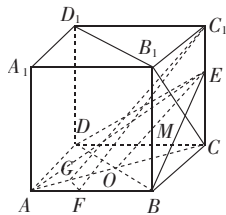
如图, 设 $BC = 2$, 易知二面角 $C-AB-E$ 的平面角为 $\angle CBE$, 则 $\tan \angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $CE = \sqrt{2}$. 因为 $AD \parallel BC$, 所以异面直线 AE 与 BC 所成角为 $\angle DAE$. 因为

$AD \perp DE$, 所以 $\cos \angle DAE = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 故 A 错误. 设 $B_1C \cap BE = M$, 则 $\frac{B_1M}{CM}$

$= \frac{B_1B}{CE} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 B_1 到平面 ABE 的距离是 C 到平面 ABE 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍, 故 B

正确. 因为 $CE \parallel$ 平面 BDD_1B_1 , 所以 E 到平面 BDD_1B_1 的距离等于 C 到平面 BDD_1B_1 的距离, 而 C 到平面



BDD_1B_1 的距离为 $CO=\sqrt{2}$, 所以直线 BE 与平面 BDD_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{CO}{BE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则其正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以直线 BE 与平面 BDD_1B_1 所成角的大小等于二面角 $C-AB-E$ 的大小, 故 C 正确. 在 AC 上找一点 G , 使得 $C_1G \parallel EO$, 过 G 再作 BD 的平行线交 AB 于 F , 易证平面 $C_1GF \parallel$ 平面 BDE , 从而可知 $C_1F \parallel$ 平面 BDE , 故 D 正确.

12. BD 【解析】本题考查导数与不等式的综合应用, 考查构造函数的方法的灵活应用与推理论证能力.

设 $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^2}, h(x)=\frac{f(x)}{x}, x \in (0, +\infty)$,
 则 $g'(x)=\frac{[f'(x)-1]x^2-2x[f(x)-x]}{x^4}=\frac{xf'(x)-2f(x)+x}{x^3}, h'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
 因为 $f(x)<xf'(x)<2f(x)-x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,
 所以 $g'(x)<0, h'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 则 $g(1)>g(2), h(1)<h(2)$,
 即 $\frac{f(1)-1}{1^2}>\frac{f(2)-2}{2^2}, \frac{f(1)}{1}<\frac{f(2)}{2}$, 即 $\frac{f(2)}{4}+\frac{1}{2}<f(1)<\frac{f(2)}{2}$.

13. $\sqrt{35}$ 【解析】本题考查平面向量的数量积与模, 考查运算求解能力.

因为 $|2a-b|^2=(2a-b)^2=4a^2-4a \cdot b+b^2=37-12\cos\langle a, b \rangle=37-2=35$, 所以 $|2a-b|=\sqrt{35}$.

14. n^2+n 【解析】本题考查椭圆的焦距与等差数列的前 n 项和, 考查运算求解能力.

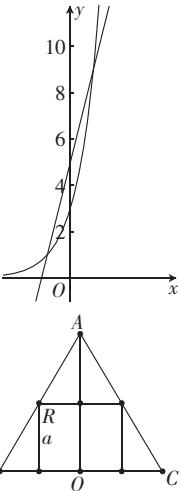
因为 $a_n=2\sqrt{2n^2+1-(n^2+1)}=2n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{(2+2n)n}{2}=n^2+n$.

15. $(-1, 1)$ 【解析】本题考查基本初等函数的图象, 考查数形结合的思想与直观想象的核心素养.

在同一直角坐标系中, 作出函数 $y=3^{x+1}, y=4x+5$ 的图象, 这两个图象的交点为 $(-1, 1), (1, 9)$, 故由图可知不等式 $3^{x+1}<4x+5$ 的解集为 $(-1, 1)$.

16. 2 【解析】本题考查圆锥的内接圆柱问题, 考查空间想象能力与运算求解能力.

设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 高为 h , 因为圆锥的侧面展开图为半圆, 所以 $\pi l=2\pi r$, 解得 $l=2r$. 因为圆锥的表面积为 48π , 所以 $\frac{1}{2}\pi l^2+\pi r^2=48\pi$, 解得 $r=4, l=8, h=4\sqrt{3}$. 如图, 设内接圆柱的底面半径为 R , 高为 a , 则 $\frac{a}{4\sqrt{3}}=\frac{4-R}{4}$, 所以 $a=\sqrt{3}(4-R)$, 内接圆柱的侧面积 $S=2\pi Ra=2\sqrt{3}\pi[-(R-2)^2+4]$, 当 $R=2$ 时, S 取最大值.



17. 解: 选①

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{1}{2}, a_1=4$, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列, 2 分

所以 $a_n=4 \times (-\frac{1}{2})^{n-1}=(-\frac{1}{2})^{n-3}$ 4 分

当 n 为奇数时, $S_n=\frac{4[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{8}{3}(1+\frac{1}{2^n})$, 6 分

因为 $\frac{8}{3}(1+\frac{1}{2^n})$ 随着 n 的增加而减少, 所以此时 S_n 的最大值为 $S_1=4$ 7 分

当 n 为偶数时, $S_n=\frac{8}{3}(1-\frac{1}{2^n})$, 8 分

且 $S_n=\frac{8}{3}(1-\frac{1}{2^n})<\frac{8}{3}<4$ 9 分

综上, S_n 存在最大值, 且最大值为 4. 10 分
 选②

因为 $a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{6}$, $a_1=4$, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公差为 $-\frac{1}{6}$ 的等差数列, 2 分

所以 $a_n=4+(n-1)(-\frac{1}{6})=-\frac{1}{6}n+\frac{25}{6}$ 4 分

由 $-\frac{1}{6}n+\frac{25}{6}\geq 0$, 得 $n\leq 25$, 6 分

所以 S_n 存在最大值, 且最大值为 S_{25} (或 S_{24}), 8 分

因为 $S_{25}=25\times 4+\frac{25\times 24}{2}\times (-\frac{1}{6})=50$, 所以 S_n 的最大值为 50. 10 分

选③

因为 $a_{n+1}=a_n+n-8$, 所以 $a_{n+1}-a_n=n-8$, 1 分

所以 $a_2-a_1=-7, a_3-a_2=-6, \cdots, a_n-a_{n-1}=n-9$, 3 分

则 $a_n-a_1=a_2-a_1+a_3-a_2+\cdots+a_n-a_{n-1}=\frac{(-7+n-9)(n-1)}{2}=\frac{n^2-17n+16}{2}$, 5 分

又 $a_1=4$, 所以 $a_n=\frac{n^2-17n+24}{2}$ 6 分

当 $n\geq 16$ 时, $a_n>0$, 8 分

故 S_n 不存在最大值. 10 分

18. 解: (1) 由题意可知抽取的 60 名学生中男生有 40 人, 女生有 20 人, 则列联表如下:

	满意	不满意	合计
男生	10	30	40
女生	8	12	20
合计	18	42	60

..... 2 分

因为 $K^2=\frac{60\times (10\times 12-30\times 8)^2}{18\times 42\times 40\times 20}=\frac{10}{7}\approx 1.429<2.706$, 4 分

所以没有 90% 的把握认为“对线上教学是否满意与性别有关”. 5 分

(2) X 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 由题意可知, $X\sim B(3, \frac{3}{10})$, 6 分

$P(X=k)=C_3^k(\frac{3}{10})^k(\frac{7}{10})^{3-k}, k=0, 1, 2, 3$, 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{343}{1000}$	$\frac{441}{1000}$	$\frac{189}{1000}$	$\frac{27}{1000}$

..... 10 分

$EX=3\times \frac{3}{10}=\frac{9}{10}$ 12 分

19. 解: (1) 因为 $\sin C=\frac{3\sqrt{21}}{14}$, 所以 $\cos C=\pm \sqrt{1-\sin^2 C}=\pm \frac{\sqrt{7}}{14}$ 1 分

若 $\cos C=-\frac{\sqrt{7}}{14}<0$, 则 $\cos A=4\cos C<0$, 从而 A, C 均为钝角, 这不可能, 2 分

故 $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{14}, \cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}, \sin A=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 4 分

所以 $\cos B=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C$ 5 分

$=-\frac{\sqrt{7}}{14}\times \frac{2\sqrt{7}}{7}+\frac{\sqrt{21}}{7}\times \frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{1}{2}$, 6 分

因为 $0<B<\pi$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$ 7 分

(2)由(1)知 $\sin A : \sin B : \sin C = \frac{\sqrt{21}}{7} : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{3\sqrt{21}}{14} = 2 : \sqrt{7} : 3$, 8分

由正弦定理得 $BC : AC : AB = 2 : \sqrt{7} : 3$ 9分

设 $AB = 3k$, 则 $AC = \sqrt{7}k$, $BC = 2k$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 $(5 + \sqrt{7})k = 5 + \sqrt{7}$, 10分

解得 $k = 1$, 从而 $BC = 2$, $AB = 3$, 11分

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 12分

20. (1)证明: 因为 $BD \perp \alpha$, $BD \perp$ 平面 ABC ,

所以 $\alpha \parallel$ 平面 ABC , 1分

又 $\alpha \cap$ 平面 $BCD = l$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $BCD = BC$,

所以 $BC \parallel l$ 2分

因为 $EA \perp$ 平面 ABC ,

所以 $BC \perp AE$ 3分

又 $BC \perp AC$, $AE \cap AC = A$,

所以 $BC \perp$ 平面 AEC , 4分

从而 $l \perp$ 平面 AEC 5分

(2)解: 作 $CF \parallel AE$, 以 C 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$, 则 $A(0$,

$1, 0)$, $C(0, 0, 0)$, $D(\sqrt{3}, 0, 1)$, $E(0, 1, 2)$ 6分

设 $P(a, 0, 1)$, 平面 PAE 、平面 ACD 的法向量分别为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{n} = (x_2, y_2$,

$z_2)$, 则 $\overrightarrow{AP} = (a, -1, 1)$, $\overrightarrow{AE} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 0)$, $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3}, 0, 1)$ 7分

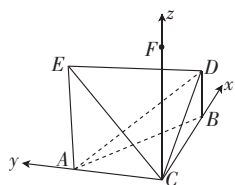
因为 $\mathbf{m} \perp$ 平面 PAE ,

所以 $\begin{cases} ax_1 - y_1 + z_1 = 0, \\ 2z_1 = 0, \end{cases}$ 令 $x_1 = 1$, 得 $y_1 = a$, $z_1 = 0$, 即 $\mathbf{m} = (1, a, 0)$ 9分

同理 $\begin{cases} -y_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_2 + z_2 = 0, \end{cases}$ 令 $x_2 = 1$, 得 $y_2 = 0$, $z_2 = -\sqrt{3}$, 即 $\mathbf{n} = (1, 0, -\sqrt{3})$ 10分

因为 $|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{1}{2\sqrt{a^2+1}} \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = 0$ 时取等号, 11分

所以平面 PAE 与平面 ACD 所成锐二面角的最小值为 60° 12分



21. (1)解: 当 C 的对称轴为 x 轴时, 设 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$),

将点 A 的坐标代入方程得 $6^2 = 2p \cdot 4$, 即 $p = \frac{9}{2}$, 1分

此时 A 到 C 的焦点的距离为 $4 + \frac{p}{2} = \frac{25}{4}$ 2分

当 C 的对称轴为 y 轴时, 设 C 的方程为 $x^2 = 2py$ ($p > 0$),

将点 A 的坐标代入方程得 $4^2 = 2p \cdot 6$, 即 $p = \frac{4}{3}$, 3分

此时 A 到 C 的焦点的距离为 $6 + \frac{p}{2} = \frac{20}{3}$ 4分

(2)证明: 由(1)可知, 当 C 的对称轴为 x 轴时, C 的方程为 $y^2 = 9x$.

直线 l 斜率显然不为 0, 可设直线 l 的方程为 $x = my + 9$, 5分

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 线段 MN 的中点为 $G(x_0, y_0)$.

由 $\begin{cases} y^2 = 9x, \\ x = my + 9, \end{cases}$ 得 $y^2 - 9my - 81 = 0$, 6分

则 $y_1 + y_2 = 9m$, $y_1 y_2 = -81$, 7分

所以 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{9m}{2}$, $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{9m^2 + 18}{2}$, 8分

且 $|MN| = \sqrt{1+m^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 9\sqrt{(1+m^2)(4+m^2)}$ 9分

以线段 MN 为直径的圆的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(\frac{|MN|}{2})^2$,

即 $x^2-9(m^2+2)x+y^2-9my=0$, 10 分

即 $x^2-18x+y^2-9m(mx+y)=0$, 令 $mx+y=0$, 则 $x^2-18x+y^2=0$,

因为 $m \in \mathbf{R}$, 所以圆 $x^2-18x+y^2-9m(mx+y)=0$ 过定点 $(0,0)$, 11 分

从而以线段 MN 为直径的圆过定点. 12 分

22. 解: (1) $f'(x)=(x+\frac{1}{2})(e^x+2a)$ 1 分

当 $a \geq 0$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 2 分

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \ln(-2a)$.

① 当 $\ln(-2a) = -\frac{1}{2}$, 即 $a = -\frac{\sqrt{e}}{2e}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 3 分

② 当 $\ln(-2a) < -\frac{1}{2}$, 即 $-\frac{\sqrt{e}}{2e} < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln(-2a), -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\infty, \ln(-2a)), (-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

③ 当 $\ln(-2a) > -\frac{1}{2}$, 即 $a < -\frac{\sqrt{e}}{2e}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \ln(-2a))$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -\frac{1}{2}), (\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递增. 5 分

(2) 当 $a > 0$ 时, 由 (1) 可知 $f(x)$ 只有一个极小值点 $x = -\frac{1}{2}$,

且 $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{e}}{e} < 0, f(\frac{1}{2}) = a > 0$ 6 分

(方法一) 取 $b < -\frac{3}{2}$, 且 $b < \ln \frac{a}{2}$, 则 $e^b < \frac{a}{2}$,

$f(b) > (b - \frac{1}{2}) \cdot \frac{a}{2} + a(b + \frac{1}{2})^2 = ab^2 + \frac{3}{2}ab = a(b^2 + \frac{3}{2}b)$, 7 分

因为 $b < -\frac{3}{2}$, 所以 $b^2 + \frac{3}{2}b > 0$, 则 $f(b) > 0$, 此时 $f(x)$ 有两个零点. 8 分

(方法二) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $(x - \frac{1}{2})e^x \rightarrow 0, a(x + \frac{1}{2})^2 \rightarrow +\infty$, 7 分

从而 $f(x) \rightarrow +\infty$, 因此 $f(x)$ 有两个零点. 8 分

当 $a = 0$ 时, $f(x) = (x - \frac{1}{2})e^x$, 此时 $f(x)$ 只有一个零点, 不符合题意. 9 分

当 $a < 0$ 时, 若 $x < \frac{1}{2}$, 则恒有 $f(x) < 0$.

当 $-\frac{\sqrt{e}}{2e} \leq a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可能有两个零点. 10 分

当 $a < -\frac{\sqrt{e}}{2e}$ 时, 若 $\ln(-2a) \leq \frac{1}{2}$, 同理可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可能有两个零点;

若 $\ln(-2a) > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上先减后增, 此时 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也不可能有两个零点. 11 分

综上, a 的取值范围是 $(0, +\infty)$ 12 分